21/03/2013

Μάθημα 6ο

Απει4

<u>Υπενθύμιση: Θεώρημα Fubini:</u>

$A\subset\mathbb{R}^n$ $B\subset\mathbb{R}^m$ κλειστά ορθογώνια και $f: A\times B\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $\forall \bar{x}\in A$: $f(\bar{x},\cdot): B\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int_{A\times B} f(\bar{x},\bar{y})\, d(\bar{x},\bar{y}) = \int_A \left(\int_B f(\bar{x},\bar{y})\, d\bar{y}\right) d\bar{x} \quad (*)$$

Επειδή (πόρισμα του κριτηρίου Lebesgue):

« Μια συνεχής συνάρτηση, ορισμένη σε κλειστό ορθογώνιο είναι ολοκληρώσιμη »

προκύπτει ότι <u>αν</u> η $f: A\times B\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής ($\Rightarrow \forall \bar{x}\in A$: $f(\bar{x},\cdot)$ είναι συνεχής) ο τύπος αυτός $(*)$ ισχύει.

$\Longrightarrow$ (α) επιτρέπεται η αλλαγή ολοκληρωμάτων:

$$\int_A\int_B f(\bar{x},\bar{y})\, d\bar{y}\, d\bar{x} = \int_B\int_A f(\bar{x},\bar{y})\, d\bar{x}\, d\bar{y}$$

(β) ισχύει η <u>επαναληπτική ολοκλήρωση</u>, δηλαδή για $A\subset\mathbb{R}^n$, $A=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\dots\times[a_n,b_n]$ και $f: A\to\mathbb{R}$ συνεχής

$$\Longrightarrow \int_A f = \int_A f(\bar{x})\, d\bar{x} = \int_A f(x_1,\dots,x_n)\, d(x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\, dx_n \dots dx_1$$

$$\left(= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} dx_n\, f(x_1,\dots,x_n) \right)$$

όπου μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως προς κάθε $x_i\in[a_i,b_i], i=1..n$ ξεχωριστά και με οποιαδήποτε σειρά.

Παράδειγμα

$$\int\limits_{\underbrace{[0,2]\times[3,4]}_{A}} \underbrace{(2x+3y)}_{f(x,y)}\, d(x,y) \quad (\mathrm{I})$$

$x \in [0,2]$, $y \in [3,4]$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις για Θεώρημα Fubini.

$$I = \int_0^2 \int_3^4 (2x+3y)\,dy\,dx = \int_3^4 \left(\int_0^2 (2x+2y)\,dx \right) dy \quad (\mathrm{II})$$

Το y είναι σταθερά ως προς το x

$$\int_0^2 (2x+2y)\,dx = 2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 + 3y\cdot 2 = 4+6y$$

Άρα: $\mathrm{II} = \int_3^4 (4+6y)\,dy = \dots$

Άσκηση

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[c,d]\to A$ συνεχείς. Δ.ο.

$$\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)\,d(x,y) = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$$

$h(x,y) = f(x)\cdot g(y)$, $h:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ συνεχής

Άρα: $$\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} h(x,y)\,d(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \int_c^d h(x,y)\,dy\,dx =$$

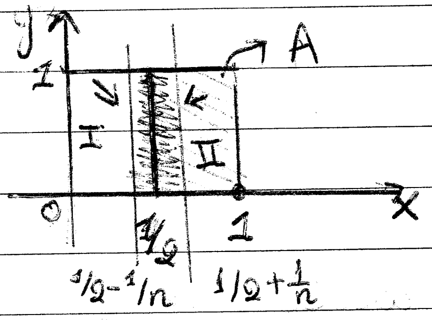
$$= \int_a^b \left(\int_c^d \underbrace{f(x)}_{\text{σταθερά ως προς y}} g(y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left(f(x) \overbrace{\left(\int_c^d g(y)\,dy \right)}^{\text{σταθερά ως προς x}} \right) dx =$$

$$= \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$$

Άσκηση (έχει μπει θέμα)

Έστω $A=[0,1]\times[0,1]$, $f(x,y)=\begin{cases}1, & x\geq 1/2\\ 0, & x<1/2\end{cases}$

Εξετάστε αν η f είναι ολοκληρώσιμη και υπολογίστε το $\int_A f$.



σταθερά 0 στο I και σταθερά 1 στο II

Λύση

Θεωρούμε τη διαμέριση $P_n=\{0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1\}\times\{0,1\}$

$\Rightarrow 0\leq U_f-L_f\leq U(f,P_n)-L(f,P_n)=\frac{2}{n}\quad \forall n$

$\Rightarrow U_f=L_f \Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη $\left(\int_A f=;\right)$

Στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη

πρόσθεση $\Longrightarrow \int_A f=\int_{[0,1]\times[0,1]} f=\int_{[0,1/2]\times[0,1]} f+\int_{[\frac{1}{2},1]\times[0,1]} f$

Επίσης παρατηρούμε ότι όταν αλλάζουμε την

$$f\big|_{[0,1/2]\times[0,1]}(x,y)=\begin{cases}0, & x<1/2\\ 1, & x=1/2\end{cases}$$

σε $$\tilde{f}\big|_{[0,1/2]\times[0,1]}(x,y)=0$$

Θα έχουμε $\int_{[0,1/2]\times[0,1]} \tilde{f} = 0$

Τέλος, έχουμε: $\int_{[1/2,1]\times[0,1]} f = \int_{[1/2,1]\times[0,1]} 1/2 = 1/2.$

$\int_A f = \frac{1}{2}$ (με άνω και κάτω αθροίσματα)

Συμπέρασμα: Μάλλον το ποια είναι η τιμή της f στο $\{1/2\}\times[0,1]$ δεν παίζει ρόλο! Γιατί;

Διαισθητικά: ⓐ Έστω $\bar{M}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x\leq 2,\ y=0\}=\tilde{M}\times\{0\}$
Αυτό δεν έχει εμβαδό (παρά που αναφέρεται στον $\mathbb{R}^2$)
ενώ, βέβαια, αν δω το $\tilde{M}=[1,2]\subset\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$ αυτό έχει μήκος
(παρά που αναφέρεται στον $\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$)
εμβαδό = διδιάστατο περιεχόμενο
μήκος = μονοδιάστατο περιεχόμενο.

ⓑ Έστω $X=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ (x,y)\in[0,1]\times[0,1],\ z=0\} =$
$= ([0,1]\times[0,1])\times\{0\} = A\times\{0\}$
Τότε το $X\subset\mathbb{R}^3$ δεν έχει όγκο (παρά που εμφανώς αναφέρεται στον $\mathbb{R}^3$) αλλά το $A\subset\mathbb{R}^2$ έχει εμβαδό $=1$.
όγκος = τριδιάστατο περιεχόμενο

Για να καταλάβουμε τις διαφορές αυτές εισάγουμε τις εξής έννοιες:

Ορισμός: Ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ έχει:

(α) (n-διάστατο) μηδενικό μέτρο $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ ακολουθία U_i, $i \in \mathbb{N}$ από κλειστά ορθογώνια $\subset \mathbb{R}^n$ που καλύπτουν το A $:\Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset A$ και έχουν συνολικό περιεχόμενο $< \varepsilon$

$$:\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} V(U_i) < \varepsilon$$

(β) (n-διάστατο) μηδενικό περιεχόμενο: Αν αρκεί πεπερασμένος αριθμός και τέτοια U_i, δηλ. αν $\forall \varepsilon > 0 : \exists U_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, k$ $(k \in \mathbb{N})$ με $\bigcup_{i=1}^{k} U_i \supset A$ και $\sum_{i=1}^{k} V(U_i) < \varepsilon$

Παραδείγματα (ίσως τετριμμένα, αλλά SUPER-SUPER-SUPER (SOS))

(α) $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$ έχει (n-διάστατο) περιεχόμενο μηδέν (π.χ. για $n=2$:
$$\{0\} \subset \underbrace{[0, \sqrt{\varepsilon/2}] \times [0, \sqrt{\varepsilon/2}]}_{= U_0} \quad \text{με } V(U_0) = \varepsilon/2 < \varepsilon$$

(β) Κάθε μονοσύνολο $\{\bar{x}\} = \{(x_1, \ldots, x_n)\} \subset \mathbb{R}^n$ έχει μηδενικό περιεχόμενο αφού π.χ. $\forall \varepsilon > 0$ έχουμε:
$$\{\bar{x}\} \subset U := \left[x_1, x_1 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right] \times \ldots \times \left[x_n, x_n + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$
με $V(U) = \varepsilon/2 < \varepsilon$

(γ) Κάθε υπερεπίπεδο $x_i = c$, c σταθερά, $i \in \{1, \ldots, n\}$ του $\mathbb{R}^n$
$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = c\} = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \underbrace{\{c\}}_{i\text{-θέση}} \times \ldots \times \mathbb{R}$$

έχει (n-διάστατο) μηδενικό μέτρο και κάθε φραγμένο υποσύνολό του έχει (n-διάστατο) μηδενικό περιεχόμενο.

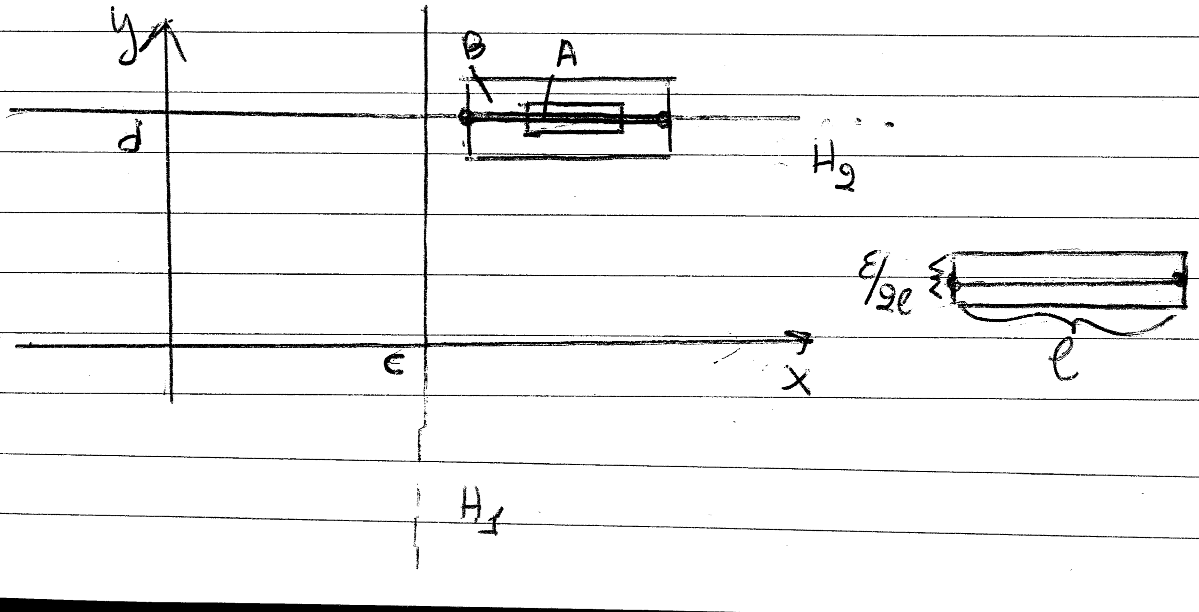
π.χ. για $\boxed{n=2}$: $H_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = c \}$, $c \in \mathbb{R}$. } είναι
$H_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = d \}$, $d \in \mathbb{R}$. } υπερεπίπεδα

[Ετυμολογία: $\underbrace{\text{επίπεδο}}$ $\subset \mathbb{R}^3$
έχει διάσταση $2 = 3-1$
$\Leftrightarrow$ έχει συνδιάσταση 1 $\to$ $\underbrace{\text{υπερεπίπεδο}}_{\text{διάσταση } n-1}$ $\subset \mathbb{R}^n$

(δηλ. το «ανάλογο» ενός επιπέδου στον $\mathbb{R}^3$ για γενική διάσταση n)]

υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}$ = σημείο
$\mathbb{R}^2$ = ευθεία
$\mathbb{R}^3$ = επίπεδο
$(n \geq 4)$ $\mathbb{R}^n$ = υπερεπίπεδο

περιεχόμενο στον $\mathbb{R}$ = μήκος
$\mathbb{R}^2$ = εμβαδό
$\mathbb{R}^3$ = όγκος
$(n \geq 4)$ $\mathbb{R}^n$ = όγκος



Καταρχήν, ας δούμε ότι ένα φραγμένο υποσύνολο A του H_2 έχει μηδενικό περιεχόμενο

$$A \subset \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=d\} = H_2 \xRightarrow[A \text{ φραγμένο}]{}$$

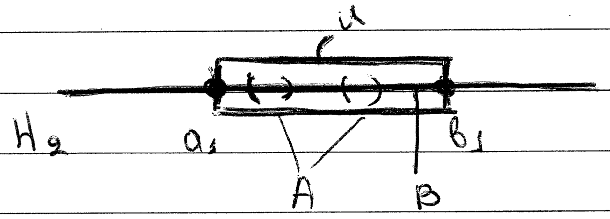
$$\Rightarrow A\subset B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[a_1,b_1],\ y=d\} \subset H_2$$

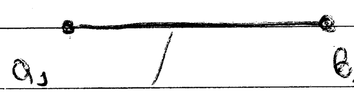
(Το B είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω στην ευθεία H_2)

Τότε για $\varepsilon>0$ και $U = [a_1,b_1]\times\left[d-\dfrac{\varepsilon}{4(b_1-a_1)},\ d+\dfrac{\varepsilon}{4(b_1-a_1)}\right]$

έχουμε $V(U) = (b_1-a_1)\cdot\dfrac{\varepsilon}{2(b_1-a_1)} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

και $A\subset B\subset U$





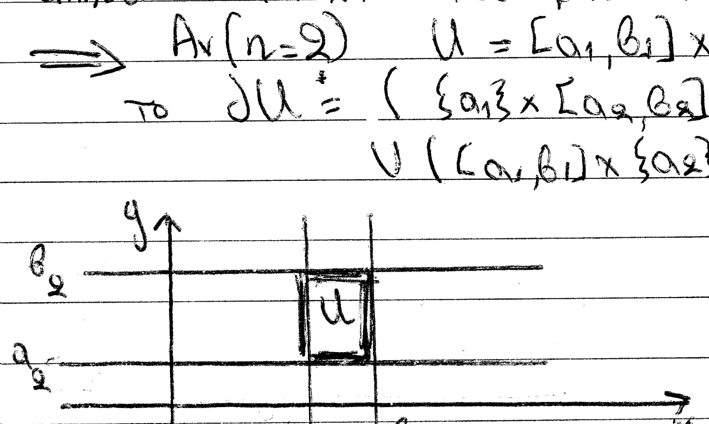
$[a_1,b_1]\subset\mathbb{R}$
με $V([a_1,b_1]) = b_1-a_1$

$\boxed{\Longrightarrow}$ SUPER$^{\infty}$ - SOS:

Ένα ευθύγραμμο τμήμα υποσύνολο μιας ευθείας στον $\mathbb{R}^2$ όπως επίσης και ένα υποσύνολο με μορφή ορθογωνίου υποσύνολο ενός επιπέδου στον $\mathbb{R}^3$ έχουν μηδενικό περιεχόμενο

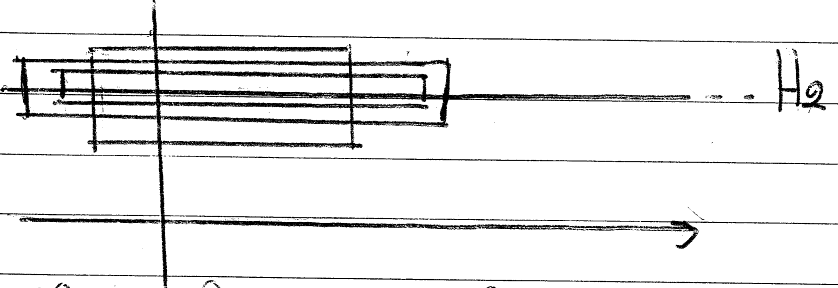
$\Longrightarrow$ Αν $(n=2)$ $U = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$

το $\partial U = (\{a_1\}\times[a_2,b_2]) \cup (\{b_1\}\times[a_2,b_2]) \cup$
$\cup\ ([a_1,b_1]\times\{a_2\}) \cup ([a_1,b_1]\times\{b_2\})$



έχει μηδενικό περιεχόμενο, ως πεπερασμένη ένωση συνόλων μηδενικού περιεχομένου.

Η ιδέα για να δείξουμε ότι το $H_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = d\}$ έχει μηδενικό μέτρο είναι η εξής:



δηλ δ. επιλέγουμε ως κλειστά ορθογώνια τα
$U_k = [-k,k] \times \left[d - 2^{\frac{\varepsilon}{k+2}} \cdot 2k,\ d + 2^{\frac{\varepsilon}{k+2}} \cdot 2k\right]$

με $H_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{V(U_k)}_{\shortparallel}$

$2k \cdot 2 \frac{\varepsilon}{2^{k+2} \cdot 2k} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2^k}$ $\varepsilon > 0$

$= \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Άσκηση κατανόησης πρότασης: 4.15. (βιβλίο Γιαννούλη)